Étude de $O(p,q)$

Leçon : 156, 170, 171, 106, 160, 158

Réf. H2G2, tome 1 p210-213.

Définition

Soit p et q deux entiers naturels. On note $O(p,q)$ le sg de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{p} & \\ & \underbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}_{q} \end{pmatrix}.$$

((p,q) est sa signature).

Théorème

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Il existe un homéomorphisme

$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$

Prérequis :
- $\exp$ homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$
- décomposition polaire.

Preuve

Stratégie.
1) décomposition polaire $M \mapsto (O,S)$ induit une bijection bicontinue
$$O(p,q) \simeq \left(O(p,q) \cap O(n)\right) \times \left(O(p,q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})\right)$$
2) $O(p,q) \cap O(n) \simeq O(p) \times O(q)$
3) $O(p,q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$

1) On note $n = p+q$. Soit $M \in O(p,q) \subset GL_n(\mathbb{R})$. On utilise la décomposition polaire de M, on écrit $M = OS$ avec $O \in O(n)$, matrice orthogonale et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On veut montrer que O et S sont dans $O(p,q)$. Il suffit de montrer que S l'est.

On pose $T = M^T M$. On a alors $S^2 = (O^T M)^2 = T$ [car $S = S^T$, donc $S^2 = S^T S = M^T O O^T M = M^T M = T$.]

Montrons d'abord que $O(p,q)$ est stable par transposition.

$M \in O(p,q) \Rightarrow M I_{(p,q)} M^T = I_{(p,q)}$, avec $I_{(p,q)} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$.

$$\left(\Rightarrow (M^T)^{-1} I_{p,q} M^{-1} = I_{p,q} \right)$$

$$\Rightarrow (M^{-1})^T I_{p,q} M^{-1} = I_{q,q}$$

$$\Rightarrow (M^{-1})^T \in O(p,q)$$

$$\Rightarrow M^T \in O(p,q) \text{ (structure de groupe).}$$

Ainsi, $T = M^T M \in O(p,q)$. On a donc $S^2 \in O(p,q)$.

On veut prendre "la racine carré" de T. On va utiliser l'exponentielle.

$T \in S_m^{++}(\mathbb{R})$, donc on peut écrire $T = \exp U$ avec $U \in S_m(\mathbb{R})$. On a alors,

$$T \in O(p,q) \Leftrightarrow T I_{p,q} T^T = I_{p,q}$$
$$\Leftrightarrow T^T = I_{p,q}^{-1} T^{-1} I_{p,q}$$
$$\Leftrightarrow (\exp U)^T = I_{p,q}^{-1} (\exp U)^{-1} I_{p,q}$$
$$\Leftrightarrow \exp(U^T) = I_{p,q}^{-1} \exp(-U) I_{p,q}$$
$$\Leftrightarrow \exp(U^T) = \exp(-I_{p,q}^{-1} U I_{p,q})$$

$\exp : S_m \to S_m^{++}$ bijective

$$\Leftrightarrow U^T = U = -I_{p,q}^{-1} U I_{p,q}$$
$$\Leftrightarrow I_{p,q} U + U I_{p,q} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{U}{2} I_{p,q} + I_{p,q} \frac{U}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \exp\left(\frac{U^T}{2}\right) = \exp\left(-I_{p,q} \frac{U}{2} I_{p,q}^{-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \exp\left(\frac{U^T}{2}\right) = -I_{p,q} \exp\left(\frac{U}{2}\right) I_{p,q}^{-1}.$$

Or $\exp(U/2) \in S_m(\mathbb{R})$ et $\exp(U/2)^2 = \exp(U) = T \in S_m^{++}(\mathbb{R})$.

On en déduit alors que $\boxed{S = \exp(U/2)}$. (unicité de la décomposition polaire).

↳ pas trop compris...

On a donc $S I_{p,q} S^T = I_{p,q}$, donc $S \in O(p,q)$.

Par conséquent, $O \in O(p,q)$ aussi et donc la décomposition polaire $M = OS \mapsto (O, S)$ induit une bijection bicontinue

$$O(p,q) \simeq (O(p,q) \cap O(n)) \times (O(p,q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})).$$

2) $O(p,q) \cap O(n) \simeq ?$

Soit $O \in O(p,q) \cap O(n)$. On l'écrit par blocs : $O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$

où $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_{q,p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $D \in M_q(\mathbb{R})$.

Alors $O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in O(p,q) \iff O I_{p,q} O^T = I_{p,q}$

$$\iff \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

(calcul)

$$\iff \begin{cases} I_p = AA^T - BB^T \\ 0 = A^T C - B^T D \\ 0 = C^T A - D^T B \\ -I_q = C^T C - D^T D \end{cases}$$

et d'autre part $O \in O(n) \iff O O^T = I_n$

$$\iff \dots$$

$$\iff \begin{cases} A^T A + B^T B = I_p \\ A^T C + B^T D = 0 \\ C^T A + D^T B = 0 \\ C^T C + D^T D = I_q \end{cases}$$

On a $\begin{cases} B^T B = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ (considérer la trace)} \\ C^T C = 0 \Rightarrow C = 0. \end{cases}$

Ainsi $A \in O(p)$ et $D \in O(q)$.

$O(p,q) \cap O(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in O(p), D \in O(q) \right\} \simeq O(p) \times O(q).$

3) $O(p,q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq ?$

$\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, donc comme on l'a vu $\exp. L := \{ U \in M_n(\mathbb{R}) : U I_{p,q} + I_{p,q} U = 0 \} \to O(p,q)$

d'où l'homéomorphisme $S_n(\mathbb{R}) \cap L \simeq O(p,q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})$

On sait que $S_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Mq $\dim(S_n(\mathbb{R}) \cap L) = pq$.

(Par Grassmann, $\dim(S_n(\mathbb{R}) \cap L) = \dim(S_n(\mathbb{R})) + \dim(L) - \dim(S_n(\mathbb{R}) + L)$.)

Soit $U \in S_n(\mathbb{R}) \cap L$. On écrit U par blocs : $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

$U \in L \iff \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} A = 0 \\ D = 0 \end{cases}$

et $U^T = U$, donc $B^T = C$. Ainsi, $U = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$.

et réciproquement toute matrice de cette forme est dans $L \cap S_n(\mathbb{R})$

Donc $L \cap S_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}, B \in M_{p,q}(\mathbb{R}) \right\}$, $\dim(L \cap S_n(\mathbb{R})) = pq$.

donc $S_n(\mathbb{R}) \cap L \simeq \mathbb{R}^{pq}$.

Au final : $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

$\square$